数理解析研究所講究録
183巻 1973年 18-23

Canonical bundle formulars for certain elliptic threefolds.

東大 理 上野 健爾

以下 考える代数多様体は 特にことわらない限り $\mathbb{C}$ 上定義され，既約，完備 かつ 非特異とする。ファイバー空間 $f: V \longrightarrow W$ が *elliptic threefold* であるとは

① $\dim V = 3$, $\dim W = 2$

② f の 一般ファイバーは 楕円曲線

のこととする。ここでは f が 有理切断を持つ時 $12K_V$ と *linearly equivalent* な因子を具体的に与える。問題の意義，結果の応用 及び 証明は *Classification of algebraic varieties*, I. (*To appear in Compositio Math.*) を参照されたい。

elliptic threefold $f: V \longrightarrow W$ の *singular locus* S とは W の *proper algebraic subset* であって $f^{-1}(W-S)$ 上の任意の点で f は *maximal rank* になるものを云う。(ここで S をかかる性質をもつもののうちで 最小のものと限る必要はない。) さて 我々は *singular locus* S は *divisor with* normally crossings であると仮定する。この仮定は何ら本質的なものではない。

さて $W' = W - S$, $V' = f^{-1}(W')$, $f' = f|_{V'}$ とおくと $f' : V' \longrightarrow W'$ のすべてのファイバーは楕円曲線となる。さてこれらの楕円曲線上の正則一次型式を1次元ホモロジーの底で積分することによって、W'の各点の近傍より上半平面 H 上への正則写像を作ることができる。かくして $\widetilde{T} : \widetilde{W'} \longrightarrow H$ なる正則写像をうる。ここで $\widetilde{W'}$ は W' の universal covering. この時 $\Phi : \pi_1(W') \longrightarrow SL(2, \mathbb{Z})$ なる群の表現があって

$$\widetilde{T}(\gamma \cdot \widetilde{w}) = \Phi(\gamma) \cdot \widetilde{T}(\widetilde{w}), \quad \gamma \in \pi_1(W'), \ \widetilde{w} \in \widetilde{W'}$$

となる。ここで $\pi_1(W')$ は $\widetilde{W'}$ の "Decktransformation" と見なし、$\Phi(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\Phi(\gamma) \cdot \widetilde{T}(\widetilde{w}) = \frac{a\widetilde{T}(\widetilde{w}) + b}{c\widetilde{T}(\widetilde{w}) + d}$$

と定める。かくして $(\widetilde{T}, \Phi)$ が $f' : V' \longrightarrow W'$ より定まるが一意的ではない。もし $(\widetilde{T}_1, \Phi_1)$ も $f' : V' \longrightarrow W'$ に対応しているとすると $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ が存在して

$$\widetilde{T}_1(\widetilde{w}) = M \cdot \widetilde{T}(\widetilde{w}), \quad {}^\forall \widetilde{w} \in \widetilde{W'}$$
$$\Phi_1(\gamma) = M \cdot \Phi(\gamma) \cdot M^{-1}, \quad {}^\forall \gamma \in \pi_1(W')$$

となる.

逆に $(\hat{\tau}, \Phi)$ が W' 上に与えられると我々は次のようにして elliptic threefold を構成することができる。

$\beta \in \pi_1(W')$ と整数 n_1, n_2 に対して $\widehat{W}' \times \mathbb{C}$ の解析的自己同型 $g(\beta; n_1, n_2)$ を

$$g(\beta; n_1, n_2) : (\hat{w}, \zeta) \longrightarrow (\beta(\hat{w}), f_\beta(\hat{w})\cdot(\zeta + n_1\hat{\tau}(\hat{w}) + n_2))$$

$$f_\beta(\hat{w}) = (c_\beta \hat{\tau}(\hat{w}) + d_\beta)^{-1}$$

$$\Phi(\beta) = \begin{pmatrix} a_\beta , & b_\beta \\ c_\beta & d_\beta \end{pmatrix}$$

と定める。$\mathcal{G} = \{ g(\beta, n_1, n_2) \mid \beta \in \pi_1(W'), (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \}$ は $\widehat{W}' \times \mathbb{C}$ に properly discontinuously かつ fixed points free に作用する。商空間 $\widehat{W}' \times \mathbb{C}/\mathcal{G}$ を B' と書くことにする。

$$\begin{array}{cccc} \mu' : & B' & \longrightarrow & W' \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & [\hat{w}, \zeta] & \longmapsto & \pi(\hat{w}) \end{array}$$

によって B' は W' 上のファイバー空間となり、各ファイバーは楕円曲線。ここで $\pi : \widehat{W}' \longrightarrow W'$ は covering map。

更に μ' は

$$\begin{array}{cccc} o' : & W' & \longrightarrow & B' \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & w & \longmapsto & [\hat{w}, 0] , \end{array} \qquad \pi(\hat{w}) = w$$

なる holomorphic section をもつ。

<u>定理</u>. (S. Kawai [1]) $\mu' : B' \longrightarrow W'$ は次の性質を持つ W 上のファイバー空間 $\mu : B \longrightarrow W$ に拡張できる。

(あ) holomorphic section $\sigma' : W' \longrightarrow B'$ は μ の holomorphic section $\mu : W \longrightarrow B$ へ拡張される.

(い). $\mu : B \longrightarrow W$ は projective morphism.

Kawai [1] では B は singularity を持ったままで構成されているが, それの non-singular model は上述の論文中に構成されている。

<u>定理</u>　$f : V \longrightarrow W$ が有理切断をもてば上の定理の $\mu : B \longrightarrow W$ と双有理同値.

双有理幾何学の立場からは $\mu : B \longrightarrow W$ を考察すれば十分である。さて singular locus S の irreducible component S_i 及び S_i 上の一般点 a に対して $\mathcal{U}$ を a で S_i と transversal に交わる a の W 内のある近傍内の analytic curve とする。$\mathcal{U}$ を十分小にとり $\mathcal{U} \cap S = \mathcal{U} \cap S_i = \{a\}$ とする。この時 ~~W の orientation を~~ $\mathcal{U}-a$ 内で a を中心として正の向きに一周する closed arc γ をとり, $\iota : \pi_1(\mathcal{U}-a) \longrightarrow \pi_1(W')$ なる natural homomorphism を考える。$\Phi(\iota(\gamma))$ は Kodaira [2] p 604 表 I の type (*) の monodromy 行列と $SL(2, \mathbb{Z})$ 共役になるが この時 S_i 上の特異ファイバーのタイプは Kod (*) であると云う。このタイプは一般点 a の取り方にはよらない。

主定理　$12K_B$ は次の形の divisor と linearly equivalent.

$$\mu^*(12K_W + F) + G + H.$$

ここで

ⓐ G は B 上の effective divisor で G の各 component は μ によって W 上の点へ写される

ⓑ H は B 上のタイプが Kod(III) 及び Kod(IV) の singular fibre にその support が含まれる effective divisor

ⓒ F は W 上の effective divisor で

$$\sum_b b S_{I_b} + \sum_b (6+b) S_{I_b^*} + 2S_{II} + 10 S_{II^*} + 3S_{III} + 9S_{III^*} + 4S_{IV} + 8S_{IV^*}$$

の形をしている。ここで

$S_{(*)} = \sum S_j$, S_j 上の singular fibre のタイプは Kod$(*)$.

証明は $SL(2, \mathbb{Z})$ に関する重さ12の cusp form $\Delta(t)$ を使って B' 上に meromorphic 3 form を構成し、それが B 上の meromorphic form に拡張できることを示すことによって行われる。詳細は上述の論文を見られたい。なお主定理は更に一般的な elliptic threefolds に対しても正しいことが云える。

References

1 Kawai, S. Elliptic fibre spaces over compact surfaces. Comment. Math. Univ. St. Paul. 15 , 119 - 138 (1967)

2 Kodaira, K. On analytic surfaces II. Ann. Math. 77, 552 - 626 (1963)